• Να εξεταστεί με το κριτήριο ρίζας ή το κριτήριο λόγου, για ποια x συγκλίνουν οι σειρές. Για τα x που τα κριτήρια δεν δίνουν συμπέρασμα, να εξεταστούν διαφορετικά.

① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$　$a_k = \frac{x^k}{k^2}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}}{\frac{x^k}{k^2}}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2}\cdot|x| \longrightarrow |x|$$

Για $|x|<1$ η σειρά συγκλίνει.

Για $|x|>1$ η σειρά αποκλίνει.

Για $x=1$ έχουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Για $x=-1$ έχουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$, που συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει.

② $\sum_{k=1}^{\infty} k^k x^k$　$a_k = k^k x^k$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k^k x^k} = k\cdot|x|$$

Αν $x\neq 0$ $\sqrt[k]{a_k} = k\cdot|x| \longrightarrow +\infty$ άρα η σειρά αποκλίνει.

Για $x=0$ η σειρά συγκλίνει.

③ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!}$　$a_k = \frac{2^k x^k}{k!}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{2^{k+1}x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k x^k}{k!}}\right| = \frac{2|x|}{k+1} \longrightarrow 0$$ Άρα, η σειρά συγκλίνει $\forall x$.

④ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 x^k}{3^k}$　$a_k = \frac{k^3 x^k}{3^k}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{(k+1)^3 x^{k+1}}{3^{k+1}}}{\frac{k^3 x^k}{3^k}}\right| = \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^3|x|}{3} \longrightarrow \frac{|x|}{3}.$$

Για $|x|<3$ η σειρά συγκλίνει.

Για $|x|>3$ η σειρά αποκλίνει.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Για } x=3 \text{ η σειρά γράφεται } \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \\ \text{Για } x=-3 \text{ η σειρά γράφεται } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^3\end{array}\right\}\ \text{Αποκλίνουν.}$$

▸ Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές ②

α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{3k^3-\frac{k}{2}}$, β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2}$, γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$, δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k}-1)$.

Λύση:

α) $a_k = \frac{k+\sqrt{k}}{3k^3-\frac{k}{2}}$, $b_k = \frac{1}{k^2}$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\frac{k+\sqrt{k}}{3k^3-\frac{k}{2}}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k^3+k^{5/2}}{3k^3-k/2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{k}}}{3-\frac{1}{2k^2}} \longrightarrow \frac{1}{3}$$

Άρα, από Θεώρημα (οριακό κριτήριο σύγκρισης) η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ που συγκλίνει.

β) $0 \le \frac{\sin^2 k}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$ και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2}$ συγκλίνει.

β') $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$ $\quad \left|\frac{\sin k}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$

Επειδή η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συγκλίνει και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\sin k}{k^2}\right|$. Άρα, συγκλίνει και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$

γ) $a_k = \frac{k!}{k^k}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}}\right| = \frac{(k+1)!\, k^k}{k!\,(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k} \longrightarrow \frac{1}{e}$$

Άρα, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

δ) Θέτουμε $a_k = \sqrt[k]{k}-1 \ge 0 \ \forall k$.

$\Rightarrow 1+a_k = \sqrt[k]{k} \Rightarrow (1+a_k)^k = k$

Για $k \ge 3$: $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e < 3 \le k = (1+a_k)^k$

Συμπεραίνουμε: $1+\frac{1}{k} < 1+a_k \Rightarrow \frac{1}{k} < a_k \ \forall k \ge 3$

Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει και $0 < \frac{1}{k} < a_k \ \forall k \ge 3$.

Άρα, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

• Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

α) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ Εφαρμόζω κριτήριο ρίζας.

$a_k=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ $\quad \sqrt[k]{|a_k|}=\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}\right)^{1/k}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}\longrightarrow\frac{1}{e}<1.$

$\Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει.

β) Έστω $\theta>0$. Συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\theta^k k^{\theta}$;

$a_k=\theta^k k^{\theta}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\frac{\theta^{k+1}(k+1)^{\theta}}{\theta^k k^{\theta}}=\theta\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\theta}\longrightarrow\theta$$

Για $0<\theta<1$ η σειρά συγκλίνει.

Για $\theta>1$ η σειρά αποκλίνει.

Για $\theta=1$ η σειρά γίνεται $\sum_{k=1}^{\infty}k$ αποκλίνει.

γ) Αν $0<a<\beta$ και $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta}-k^{a}}$. Θέτουμε $a_k=\frac{1}{k^{\beta}-k^{a}}$ και $\beta_k=\frac{1}{k^{\beta}}$

$$\frac{a_k}{\beta_k}=\frac{\frac{1}{k^{\beta}-k^{a}}}{\frac{1}{k^{\beta}}}=\frac{k^{\beta}}{k^{\beta}-k^{a}}=\frac{1}{1-k^{a-\beta}}\xrightarrow[k^{a-\beta}\to 0]{a-\beta<0}1$$

Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\beta}}$. Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει για $\beta>1$.

δ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ $\quad a_k=\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ $\quad \beta_k=\frac{1}{k}$ $\quad a_k>0,\ \beta_k>0\ \forall k$.

$$\frac{a_k}{\beta_k}=\frac{\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}}{\frac{1}{k}}=\frac{k}{k^{1+\frac{1}{k}}}=\frac{1}{k^{\frac{1}{k}}}\longrightarrow 1.$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$ αποκλίνει (είναι αρμονική σειρά) συνεπώς αποκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ (από οριακό κριτήριο σύγκρισης).

ε) $\sum_{k=1}^{\infty}k^{\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ Για ποιο ρ συγκλίνει;

$$k^{\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=k^{\rho}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}=k^{\rho}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}$$

Θέτω $a_k=k^{\rho}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}$ και $\beta_k=k^{\rho}\frac{1}{k^{3/2}}=\frac{1}{k^{3/2-\rho}}$

Προκύπτει: $\frac{a_k}{\beta_k}\to 1/2$ επειδή $a_k>0,\ \beta_k>0\ \forall k$

Άρα, η $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3/2 - p > 1 \Leftrightarrow p < 1/2$

Άσκηση: Δίνονται $a_k \geq 0$ $\forall k$. Ν.δ.ο. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$ συγκλίνει.

Απόδειξη:

$0 \leq \frac{a_k}{1+k^2 a_k} \leq \frac{1}{k^2}$ Εφόσον η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+k^2 a_k}$.

Άσκηση: Έστω $a_k \geq 0$ $\forall k$. Ν.δ.ο. αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$

Απόδειξη:

Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, θα ισχύει $a_k \to 0$. Άρα, από τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = 1$, προκύπτει ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall k \geq n_0$ να ισχύει $a_k < 1$.

Έτσι, $\forall k \geq n_0 : 0 \leq a_k^2 < a_k$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ CAUCHY-SCHWARTZ:

$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$

$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)$

Άσκηση: Αν $a_k \geq 0$ $\forall k$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Ν.δ.ο. η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k} =$

$= \frac{\sqrt{a_1}}{1} + \frac{\sqrt{a_2}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{a_n}}{n}$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$S_n \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{a_k})^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} 1/k^2 \right)^{1/2} \leq M_1^{1/2} \cdot M_2^{1/2}$

όπου $M_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k$ και $M_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Άρα, έχω σειρά με θετικούς όρους και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη, άρα η σειρά συγκλίνουσα.

Υπενθύμιση: Μια $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνεχής σε κάθε σημείο $x_0 \in A$. Η f λέγεται συνεχής σε κάθε σημείο x_0 αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $(\delta = \delta(x_0, \varepsilon))$ ώστε $\forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Δύο παραδείγματα:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x)=10x$.

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$ και έστω $\varepsilon>0$.

Αναζητάμε $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \;=\; |10x-10x_0|<\varepsilon \;=\; 10|x-x_0|<\varepsilon$$

Η προφανής επιλογή είναι $\delta=\frac{\varepsilon}{10}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta$

Για $|f(x)-f(x_0)|=|10x-10x_0|=10|x-x_0|<10\delta=\varepsilon$.

<u>Παρατήρηση</u>: Το δ δεν εξαρτάται από το x_0.

2) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=x^2$

Έχουμε ότι η g συνεχής. Θα το δείξουμε με τον ε-δ ορισμό.

Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Θ.δ.ο. η g συνεχής στο x_0

Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητάμε $\delta>0$ ώστε να ισχύει η συνεπαγωγή

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |\underbrace{x^2}_{g(x)}-\underbrace{x_0^2}_{g(x_0)}|<\varepsilon$$

Αναζητώ $0<\delta\leq 1$

Αν $|x-x_0|<\delta$ τότε $|x|=|x-x_0+x_0|<1+|x_0|$

$$|x^2-x_0^2|=|x-x_0||x+x_0|\leq(\overbrace{|x|}^{\leq 1+|x_0|}+|x_0|)(|x-x_0|)\leq(1+2|x_0|)|x-x_0|<$$

$<(1+2|x_0|)\delta$. Χρειαζόμαστε $\delta\leq\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$. Θέτω $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\}$.

Για $x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta$

$$|x^2-x_0^2|\leq(1+2|x_0|)|x-x_0|<(1+2|x_0|)\delta\leq(1+2|x_0|)\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}=\varepsilon.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Το δ που ορίσαμε εξαρτάται εκτός από το ε και από το σημείο x_0.

<u>Ερώτημα</u>: Μήπως θα μπορούσαμε να επιλέξουμε το δ διαφορετικά, ώστε να μην επηρεάζεται

Ισχυρισμός: Έστω $\varepsilon>0$. Δεν υπάρχει $\delta>0$ με τέτοια ιδιότητα: $\forall x,y\in\mathbb{R}$ με $|x-y|<\delta$ να ισχύει $|\underset{g(x)}{x^2}-\underset{g(y)}{y^2}|<\varepsilon$ (*)

Απόδειξη:

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι υπάρχει τέτοιο δ.

$\forall x>0: |x+\frac{\delta}{2}-x| = \frac{\delta}{2}<\delta$

Από (*) έχω $|(x+\frac{\delta}{2})^2-x^2|<\varepsilon \Rightarrow |x^2+\delta x-\frac{\delta^2}{4}-x^2|<\varepsilon \Rightarrow$

$\delta x-\frac{\delta^2}{4}<\varepsilon \Rightarrow x<\frac{\varepsilon-\frac{\delta^2}{4}}{\delta}$ $\forall x>0$. Άτοπο!

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $(\delta=\delta(\varepsilon))$ ώστε $\forall x,y\in A$ με $|x-y|<\delta$ να ισχύει $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Παραδείγματα:

1) Η $f(x)=10x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon>0$, επιλέγω $\delta=\frac{\varepsilon}{10}$ κ.τ.λ.

2) Η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3) Η $g:[-M,M]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη:

Έστω $\varepsilon>0$. Θέτω $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}>0$. Τότε $\forall x,y\in[-M,M]$ με $|x-y|<\delta$: $\underbrace{|x^2-y^2|}_{|g(x)-g(y)|}\le 2M|x-y| < 2M\cdot\delta=\varepsilon$

Άρα, η g είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Υπενθύμιση:

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)-f(y)|\le M|x-y|$ $\forall x\in A$.

Πρόταση: Αν η $f: A\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη

Έστω ότι ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με σταθερά M. Έστω $\varepsilon>0$. Θέτω $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ κ.τ.λ.

Πρόταση: Έστω I διάστημα. Αν $f: I\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $\exists M>0$ με $|f'(x)|\le M$ $\forall x\in I$, τότε η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (με σταθερά M). [Άρα, από προηγούμενη πρόταση είναι ομοιόμορφα συνεχής.]

Απόδειξη:

Έστω $x,y\in I$ με $x<y$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού $\exists\xi\in(x,y)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

Έτσι, $|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|\le M|x-y|$.